TITLE:

On norm closed z-invariant subspaces of H^∞ (Harmonic, Analytic function spaces and Linear Operators, II)

AUTHOR(S):

丹羽, 典朗

CITATION:

丹羽, 典朗. On norm closed z-invariant subspaces of H^∞ (Harmonic, Analytic function spaces and Linear Operators, II). 数理解析研究所講究録 2002, 1277: 35-40

ISSUE DATE:

2002-07

URL:

http://hdl.handle.net/2433/42316

数理解析研究所講究録 1277 巻 2002 年 35-40

On norm closed z-invariant subspaces of H^∞

新潟大学大学院自然科学研究科　丹羽典朗 (Norio Niwa)
Department of Mathematical Sciences,
Graduate School of Science and Technology,
Niigata University

近年，Bergman 空間の z-不変部分空間に関する研究が盛んに行われている ([2, 3, 4] などを参照). それらに影響を受け，ここでは H^∞ の z-不変部分空間について考察したい.

$D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ を複素平面の単位開円板とする. H^∞ を D 上の有界正則関数からなる Banach 環とする. M を H^∞ の sup -ノルム閉部分空間とする. これより以下，部分空間といえば sup -ノルム閉部分空間のこととする. H^∞ の部分空間 M に対して，次の記号を導入する.

$$\begin{aligned} M_0 &= \{f\in M: f(0)=0\} \\ M_n &= \{f\in M: f^{(n)}(0)=\cdots=f'(0)=f(0)=0\} \qquad (n\geq 1). \end{aligned}$$

H^∞ の部分空間 M の共通零点を $Z(M)$ で表す:

$$Z(M)=\bigcap_{f\in M}\{z\in D: f(z)=0\}.$$

H^∞ の部分空間 M が，$zM\subset M$ を満たすとき，M は z- 不変，あるいは単に不変であるという. M を H^∞ の不変部分空間とする. そのとき zM は閉である. そして M に対して次の定義を与える.

M が index n である，あるいは codimension n property をもつ

$$\overset{\text{def}}{\iff} \quad \dim M/zM=n.$$

以下の定理 1 および 2 は S. Richter が一般的な設定 (正則関数からなる，ある条件を満たす Banach 空間. 詳しくは [5] 参照.) で主張し証明している. した

がって新しい結果ではないが，H^∞ の不変部分空間について考察を始める上で足がかりになると思われる．

定理 1 M を H^∞ の不変部分空間とし，$0 \notin Z(M)$ と仮定する．そのとき，

$$\dim M/zM = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad zM = M_0.$$

証明． $(\Rightarrow)$ $zM \subset M_0$ は自明である．よって逆の包含を示せばよい．$f \in M$ かつ $f \notin zM$ とする．条件 $0 \notin Z(M)$ より，f として $f(0) \neq 0$ を満たすものがとれる．そのとき

$$M = \mathbb{C}f + zM.$$

$g \in M_0$ とする．$M_0 \subset M$ であるので上式より，ある $\alpha \in \mathbb{C}$ と $h \in M$ に対して，$g = \alpha f + zh$ とかくことができる．0 を代入すると $0 = g(0) = \alpha \cdot f(0)$ であり，$f(0) \neq 0$ であるので $\alpha = 0$ を得る．よって，$M_0 \subset zM$ である．
$(\Leftarrow)$ は明らかである．

定理 1 で重要なのは $(\Rightarrow)$ であり，その意味は次のとおりである．$f \in M_0$ とする．そのとき，<u>ある $g \in H^\infty$ に対して</u> $f(z) = zg(z)$ とかくことができるのは当たり前であるが，M が index 1 であるならば，<u>$g \in M$</u> である，ということである．

$0 \in Z(M)$ である H^∞ の不変部分空間 M に対して，

$$\begin{aligned} &M \text{ の } (0 \text{ における}) \text{ order が } n \text{ である} \\ \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}\quad & n = \min_{f \in M}\{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(0) \neq 0\}. \end{aligned}$$

M の order が n であれば，

$$M = M_0 = M_1 = \cdots = M_{n-1} \supsetneqq M_n$$

である．これと定理 1 の証明より，次の系が得られる．

系 M を H^∞ の不変部分空間とする．$0 \in Z(M)$ と仮定し，その order を $n\ (\geq 1)$ とする．そのとき

$$\dim M/zM = 1 \quad \Longrightarrow \quad zM = M_n.$$

M を H^∞ の不変部分空間とする．

$$I(M) = \bigcap_\gamma N_\gamma,$$

ここで，上の intersection は $M \subset N_\gamma$ かつ index 1 の不変部分空間 N_γ すべてでとる．$I(M)$ が H^∞ の不変部分空間であることは明らか．

定理 2 M を H^∞ の不変部分空間とし，$0 \notin Z(M)$ と仮定する．そのとき，$I(M)$ は index 1 である:

$$\dim I(M)/zI(M) = 1.$$

証明. $0 \notin Z(M)$ より $0 \notin Z(I(M))$ である．よって $zI(M) = I(M)_0$ であることを示せば，定理 1 より $I(M)$ は index 1 であることが分かる．$zI(M) \subset I(M)_0$ は明らかなので，逆の包含を示す．

$f \in I(M)_0 = (\cap_\gamma N_\gamma)_0$ とする．そのとき，すべての γ に対して $f \in (N_\gamma)_0$ である．そして $M \subset N\gamma$ より $0 \notin Z(N_\gamma)$ であり，かつ index 1 であるので，定理 1 より $(N_\gamma)_0 = zN_\gamma\ (\forall\gamma)$ である．よって，$f \in \cap_\gamma zN_\gamma = z(\cap_\gamma N_\gamma) = zI(M)$ である．これで定理 2 が示された．

ここで以下の考察をする．M を $0 \notin Z(M)$ なる H^∞ の不変部分空間とする．M_n の定義より

$$zM_{n-1} \subset M_n \qquad (n = 1, 2, \cdots). \tag{1}$$

$n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，

$$\frac{M_n}{z^{n+1}} = \left\{ \frac{f}{z^{n+1}} : f \in M_n \right\}$$

とおく．$zM \subset M_0$ および (1) より

$$M \subset \frac{M_0}{z} \subset \frac{M_1}{z^2} \subset \cdots \subset \frac{M_n}{z^{n+1}} \subset \cdots \tag{2}$$

であることが分かる．ここで次の定義を与える:

$$\widetilde{M} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{z^{n+1}}},$$

ただし，$\overline{\cdot}$ はノルム閉包を表す．$\widetilde{M}$ が M を含む不変部分空間であることは容易に確かめることができる．

注意. もし上の不変部分空間 M が index 1 であれば，定理 1 とその系により，(2) において等号が成り立つ:

$$M = \frac{M_0}{z} = \frac{M_1}{z^2} = \cdots = \frac{M_n}{z^{n+1}} = \cdots .$$

したがって，$\widetilde{M} = M$ である．

この不変部分空間 $\widetilde{M}$ に対して，次の結果が得られた．

定理 3 M を H^∞ の不変部分空間とし，$0 \notin Z(M)$ とする．そのとき，

$$\dim \widetilde{M}/z\widetilde{M} = 1 \quad \text{であり，かつ} \quad \widetilde{M} = I(M).$$

証明. $M \subset \widetilde{M}$ より $0 \notin Z(\widetilde{M})$ である．$(\widetilde{M})_0 \subset z\widetilde{M}$ を示せば，定理 1 より $\widetilde{M}$ は index 1 であることが分かる．

$f \in (\widetilde{M})_0$ とする．そのとき，

$$\exists \{f_k\}_k \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{z^{n+1}} \quad \text{such that} \quad f_k \in \frac{M_k}{z^{k+1}} \quad (\forall k)$$
$$\text{and} \quad f_k \to f \quad \text{(in norm)}.$$

仮定 $0 \notin Z(M)$ より，$g \in M$ かつ $g(0) \neq 0$ なる g がとれる．そのとき

$$z^{n+1} f_n - z^{n+1} \frac{f_n(0)}{g(0)} g \in M_{n+1}.$$

よって

$$\frac{z^{n+1} f_n - z^{n+1} \frac{f_n(0)}{g(0)} g}{z^{n+2}} = \frac{f_n - \frac{f_n(0)}{g(0)} g}{z} \in \frac{M_{n+1}}{z^{n+2}} \subset \widetilde{M}.$$

上式より

$$f_n - \frac{f_n(0)}{g(0)} g \in z\widetilde{M}$$

を得る．$z\widetilde{M}$ はノルム閉であり，f_n は f にノルム収束している $(f_n(0) \to f(0) = 0)$ ので，$f \in z\widetilde{M}$ であることが分かる．したがって $\widetilde{M}$ は index 1 である．これで前半が終了した．

次に $\widetilde{M} = I(M)$ を示す．不変部分空間 M が

(i) index 1 である場合，と

(ii) そうでない場合

とに場合分けをする．

Case (i) $I(M)$ の定義より $I(M) = M$ である．よって，定理 3 の前に述べた注意より

$$\widetilde{M} = \overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{z^{n+1}}} = M = I(M).$$

Case (ii) 定理 2 より $I(M)$ は index 1 である．よって Case (i) より，$\widetilde{I(M)} = I(M)$ である．また，$M \subset I(M)$ であるので $\widetilde{\ }$ の定義の仕方より $\widetilde{M} \subset \widetilde{I(M)}$ を得る．また一方、前半で示したように $\widetilde{M}$ は M を含む index 1 の不変部分空間であるので，$I(M)$ の定義から，$I(M) \subset \widetilde{M}$ を得る．まとめると，

$$\widetilde{M} \subset \widetilde{I(M)} = I(M) \subset \widetilde{M}.$$

よって $\widetilde{M} = I(M)$ が成り立つ．これで定理 3 が示された．

定理 3 により，H^∞ の不変部分空間 M に対する Richter が用いた $I(M)$ の別の表現が得られた．しかし，これをどのように使うことができるかは今後の課題である．

最後に参照してほしい論文を紹介したい．Hardy 空間 H^2 の $\{0\}$ 以外のすべての z-不変部分空間は index 1 である（[5] 参照．ただし index は H^∞ のものと同様に定義する）．H^∞ の index 2 の不変部分空間の例は [5, p. 600] を参照．また，H^∞ の index $\mathfrak{c}$ （ここで $\mathfrak{c}$ は実数の cardinal number）の不変部分空間の例は [1, p. 42] を参照．

参考文献

[1] A. Borichev, *Invariant subspaces of given index in Banach spaces of analytic functions*, J. Reine Angew. Math., **505** (1998), 23–44.

[2] H. Hedenmalm, *An invariant subspace of the Bergman space having the codimension two property*, J. Reine Angew. Math., **443** (1993), pp. 1–9.

[3] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, *Theory of Bergman spaces*, Springer-Verlag, New York, 2000.

[4] H. Hedenmalm, S. Richter and K. Seip, *Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces*, J. Reine Angew. Math., **477** (1996), pp. 13–30.

[5] S. Richter, *Invariant subspaces in Banach spaces of analytic functions*, Trans. Amer. Math. Soc., **304** (1987), pp. 585–616.